Eine neue Näherungsformel für den Umfang der Ellipse

Bodo Wolf
BTU Cottbus-Senftenberg, Universitätsplatz 1, 01968 Senftenberg

Abstract

Die Bestimmung des Ellipsenumfangs ist nicht selten erforderlich, z. B. in der planetaren Astronomie. Die exakte Berechnung basiert auf den elliptischen Integralen; insbesondere bei kleinen Exzentrizitäten – wie sie bei den Planeten auftreten – kann man auch Näherungsformeln benutzen. Diese versagen, wenn die Exzentrizität gegen 1 strebt. Im Falle $\varepsilon = 1$ entartet die Ellipse zu einer Doppelgeraden mit der Länge 4a (große Hauptachse a). Außerdem wird die Konvergenz der Reihenentwicklungen schlecht (davon bemerkt man allerdings kaum etwas bei den heutigen Rechnergenerationen).

Die klassische Näherungsformel für den Ellipsenumfang lautet

$$\mathbf{U_1 \approx \pi\, [1{,}5(a + b) - \sqrt{ab}\,]}$$

Statt $U = 4a$ liefert diese Formel im Grenzfall $\varepsilon = 1$ $(b = 0)$ den Umfang
$U_1 = 1{,}5\pi a = 4{,}7124 * a$, d.h. einen um 17,81% **zu großen Wert**.

Die in dieser Arbeit abgeleitete Formel

$$\mathbf{U_2 \approx 2\pi/3 * \{a + b +} \sqrt{0{,}5(a^2 + b^2)}\ \mathbf{\}}$$

liefert im Fall $\varepsilon = 1$ einen Umfang $U_2 = 2\pi/3 * a * (1 + \sqrt{0{,}5}) = 3{,}5754 * a$,
d.h. einen 10,62% **zu kleinen Wert**.

Durch eine geeignete Linearkombination der Form

$$U_{\text{Ellipse}} = \alpha * U_1 + ß * U_2$$

kann man eine Näherungsgleichung erhalten, die sowohl für den Grenzfall Kreis $(a = b, \varepsilon = 0)$ als auch für den Grenzfall Doppelgerade $(b = 0, \varepsilon = 1)$ das exakte Ergebnis liefert. Man kann die Koeffizienten α und ß jedoch auch so wählen, dass man einerseits für $\varepsilon = 0$ und andererseits für eine beliebige vorgegebene Exzentrizität das exakte Ergebnis erhält. Je nach Wahl von α und ß schwankt dann der relative Fehler bei $\varepsilon = 1$ zwischen + 17,81% und -10,62%.